
GRAPHE ET FRACTALE

LE FRACTALE COMME REALISATION SOUS CONTRAINTES ET METHODE D'EXTENSION - REDUCTION DES GRAPHERS

Philippe MATHIS (Professeur) : UPRES EA 2111 « Centre de recherche Ville/Société/Territoire », laboratoire du Centre d'études Supérieures d'Aménagement (CESA), université de Tours

Email : mathis@univ-tours.fr

RÉSUMÉ : De récentes thèses ont démontré que les graphes étaient adaptés à la description fonctionnelle des réseaux, par contre les fractales se révélaient plus efficaces au niveau morphologique.

Les représentations du graphe ne sont pas suffisamment précisées dans leurs conditions et contraintes par la Théorie des Graphes. Si l'on pallie cette insuffisance, on peut montrer que les fractales sont des réalisations particulières ainsi qu'une méthode d'extension ou de réduction des graphes respectant la propriété d'homothétie interne. Nous rappelons que les réalisations des graphes ne reposent sur aucune hypothèse selon Berge et que d'autres réalisations ont été faites : plane ou projection plane d'une réalisation à trois dimensions par Cauchy, sur une sphère et sur un tore par Lhuillier et Heawood. Cependant, nous avons trouvé chez Mandelbrot lui-même la confirmation partielle de notre intuition. En effet sa représentation d'un générateur de fractale correspond à celle d'un graphe dont les sommets ne seraient pas nommés, et plus particulièrement à la réalisation planaire d'un graphe. Nous démontrons que la courbe de von Koch peut être décrite comme un graphe, et que l'homothétie interne de la représentation se traduit aussi par une homothétie interne de la matrice d'adjacence. Il suffit alors de préciser les contraintes spécifiques de la réalisation pour retrouver la fractale géométrique classique. Les graphes peuvent aussi décrire les arborescences fractales, la propriété d'auto similarité de la matrice d'adjacence et de la réalisation étant conservées. La H-fractale de Mandelbrot peut être représentée aussi sous la forme d'un arbre régulier : ce sont deux réalisations d'un même graphe mais sous contraintes différentes. De plus cette fractale n'est pas nécessairement planaire. Nous abordons rapidement l'exemple de l'arbre de Pythagore et l'utilisation des concepts de primal et quasi-dual. Le troisième exemple sera celui du tapis de Sierpinski et son application à la théorie de Christaller. Cet aspect sera étendu aux systèmes hiérarchiques rhomboïdaux de Brian Berry. Les fractales ont leurs correspondances en termes d'extension et réduction des graphes, de même que les fractales à homothétie interne stochastique. Nous considérons enfin le maillage comme une situation limite du fractale avec les exemples de la H-fractale carrée ou rectangulaire, des maillages triangulaires et fractale ternaire, du dual hexagonal, puis du quasi dual d'un graphe en expansion. La Théorie des Graphes étendue dispose ainsi d'une méthode d'extension à partir de la matrice d'adjacence ou de la réalisation et symétriquement d'une méthode de réduction ainsi que d'indices efficaces de morphologie, ce qui permet de considérables progrès dans la représentation et la modélisation des réseaux.

MOTS CLEFS : Graphe, réalisation, fractale, auto similarité, extension.

Introduction

Un certain nombre de travaux récents dans les différentes équipes du GDR Liber Géo, à Tours, à Paris à Besançon etc. ont tout à la fois montré l'efficacité de la théorie des graphes pour décrire les réseaux et leurs différentes caractéristiques comme les vitesses¹, les caractéristiques de l'offre de transport et les optimisations², les flux en masse et en valeurs³, la dynamique structurelle⁴, mais aussi ses insuffisances en terme d'indicateurs morphologiques, ce que les propriétés des fractales permettent de pallier efficacement⁵.

A la réflexion, ces différents travaux nous sont apparus non pas comme s'opposant, chacun s'attachant à développer son propre outil de façon relativement exclusive mais en réalité comme profondément complémentaires et fondamentalement proches.

D'où l'hypothèse que les fractales pourraient être considérées comme des représentations de graphes sous certaines conditions.

Cette hypothèse se trouvait implicitement renforcée par le fait que la représentation ou réalisation du graphe est un aspect curieusement complètement délaissé dans la théorie des graphes car ce n'est apparemment pas un problème important dans la dynamique des thèmes de recherche en mathématique alors qu'il apparaît essentiel pour les utilisateurs et notamment pour la modélisation des réseaux.

1 Définitions : description, représentation et réalisation des graphes

Le terme même de représentation se révèle ambigu, car désignant simultanément chez la plupart des auteurs, la définition du graphe en machine par le biais d'une matrice, d'une liste d'adjacence ou d'une matrice d'incidence et son dessin, son image graphique sur une feuille de papier ou sur tout support matériel, tableau, écran ordinateur etc.

Pour les représentations sous forme de liste ou de tableau matriciel nous utiliserons le terme description en précisant éventuellement description en machine et en spécifiant les attributs éventuels des sommets, la nature modale et les valuations des arcs.

Pour les représentations graphiques, schématiques, nous utiliserons le terme représentation ou réalisation (graphique) du graphe.

Cette notation nous semble plus cohérente car dans le premier cas on décrit le graphe en listant la totalité des sommets et des arcs avec éventuellement les attributs des sommets et les caractéristiques des arcs : nature modale, valuation, capacité etc.

Dans le second cas on réalise une des représentations possibles du graphe parmi un grand nombre possible, ceci en fonction des contraintes que l'on se fixe comme la planarité, l'isomorphie avec telle ou telle figure ou carte, ou des propriétés géométriques que l'on impose à une réalisation particulière comme un caractère fractal...

On dit qu'un graphe G est planaire s'il est possible de le représenter sur un plan de sorte que les sommets soient des points distincts, les arcs des courbes simples, et que deux arcs ne se rencontrent pas en dehors de leurs extrémités, c'est-à-dire d'un sommet du graphe.

La représentation planaire de G sur un plan s'appelle graphe planaire topologique et on la désignera encore par G .

Deux graphes topologiques que l'on peut amener à coïncider par déformation élastique du plan ne sont pas considérés comme distincts.

¹ Alain L'HOSTIS, Images de synthèses pour l'aménagement du territoire, Tours 1997

² Laurent CHAPELON, Offre de transport et aménagement du territoire, Tours 1997

³ Didier ROBERT, Le réseau routier français dans la dynamique des échanges de Marchandises de la France avec ses partenaires d'Europe Occidentale, Paris I - 2000

⁴ Hervé BAPTISTE Interaction entre le système de transport et le système de villes, Tours 1999

⁵ Cyrille Gendre GENRE-GRANDPIERRE, Forme et fonctionnement des réseaux de transport : approche fractale et réflexion sur l'aménagement des villes, Besançon 2000

2 La liberté de réalisation d'un graphe ou l'absence de règles de représentation

La représentation graphique de G est extrêmement simple : selon Claude BERGE⁶ : « seul importe de savoir comment les sommets sont reliés ». La localisation des sommets sur la figure, réalisation du graphe, ne compte pas.

Cela suppose bien évidemment que les sommets sont de simples points sans attributs déclarés du type coordonnées, sinon le problème ne se pose plus.

Ceci est intéressant car cela donne une grande liberté pour représenter un graphe, mais en contrepartie pour représenter un réseau de transport par exemple et si l'on souhaite que le résultat « ressemble » à l'observation, bref que l'on s'approche d'une carte, il conviendra de préciser cette représentation en lui adjoignant des propriétés ou contraintes supplémentaires pour que le processus d'élaboration de la représentation puisse être répétitif et le résultat reproductible ce que souhaite Waldo TOBLER⁷ pour les cartes.

Cependant les représentations habituelles sont réalisées sur papier ou sur écran d'ordinateur et sont donc des représentations planes. Or ce type de réalisation dont le caractère est implicite dans la plupart des ouvrages traitant du sujet, n'est en réalité nullement évident ni même traditionnel.

En effet si l'on remonte dans le temps, les pères fondateurs de la théorie ont montré plus de diversité que l'usage n'en a conservé.

3 La diversité des supports de réalisations des graphes

Il n'est pas mentionné que la représentation peut être « réalisée » sur un plan ou dans l'espace à trois dimensions comme le réalise Euler⁸ ou être la projection de l'un sur l'autre comme le montre l'exemple célèbre d'Augustin Louis Cauchy⁹, sur la figure ci-dessous.

Poinsot développera les travaux sur les polyèdres mais surtout LHUILIER et Heawood développeront des réalisations sur une sphère et sur un tore^{10 11 12}, ce qui est particulièrement intéressant pour la construction d'un dual.

⁶ Claude BERGE, Graphes, Dunod 1970, Paris, 400 pages

- - Hyper graphes, Bordas 1987, Paris, 241 pages

⁷ Waldo TOBLER

⁸ EULER Léonhard Elementa doctrina solidorum. Novi CommAcad. SCI. Imp. Petropol. 4 (1752-3, published 1758) 109-140 = Opéra Omnia (1) Vol 26, 72-93.

Demonstreatio nonnullarum insignium proprietatum quibus solidra hedris planis inclusa sunt praedita. Novi Comm. Acad. Sci. Imp. Petropol. 4 (1752-3, published 1758), 140-160= Opera Omnia (1), vol. 26, 94-108.

⁹ CAUCHY Augustin Louis, Recherches sur les polyèdres, Premier mémoire J. Ecole Polytechnique 9 (Cah.16) (1813), 68-86. In Graph theory 1736-1936 Biggs N.L., Lloyd E.K., Wilson R.J. Oxford University Press 1976 1986

¹⁰ POINSOT L. Sur les polygones et les polyèdres. J. Ecole Polytechnique 4 (Cah.10) (1810), 16-48. In Graph theory 1736-1936 Biggs N.L., Lloyd E.K., Wilson R.J. Oxford University Press 1976 1986.

¹¹ LHUILIER S.6A.6J. Mémoire sur la Polyédrométrie Annales de Mathématiques 3 (1812-3), 169-189. In Graph theory 1736-1936 Biggs N.L., Lloyd E.K., Wilson R.J. Oxford University Press 1976 1986.

¹² HEADWOOD P. J. Map Colour Théorem, Quaterly Journal of pure and Applied Mathematics 24 (1890), 332-338. In Graph theory 1736-1936 Biggs N.L., Lloyd E.K., Wilson R.J. Oxford University Press 1976 1986.

Figure 1 : (fig 5.5 in Graph theory)

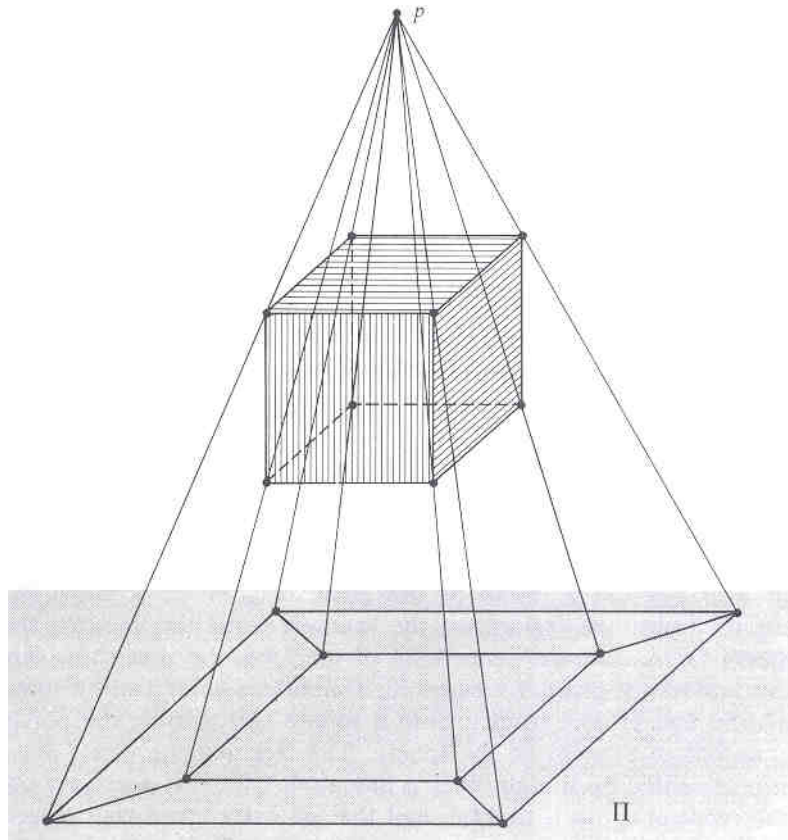
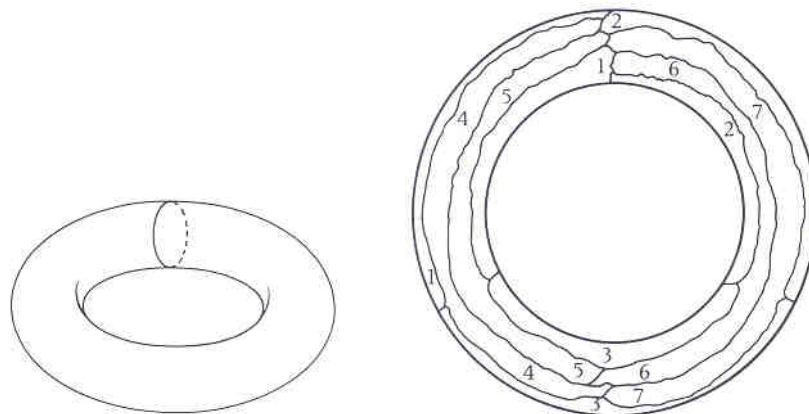


Figure 2 : (5.8 et 7.6 in Graph theory)



Il apparaît donc clairement que si un graphe peut être réalisé sur un plan qui peut être considéré comme une sphère de rayon infini, sur une sphère dont le rayon n'est pas infini et sur un tore transformé topologique de la sphère, la réalisation doit le préciser compte tenu des conséquences que cela peut avoir sur notamment la définition et la réalisation du dual¹³.

L'hypothèse implicite de Cl. BERGE ne peut donc pas suffire et il n'importe pas seulement de savoir comment les sommets sont reliés mais aussi sur quel type de surface sont effectuées les réalisations des représentations graphiques des graphes.

¹³ MATHIS s/dir. Réseaux, graphes, représentations et développements, Hermes à paraître 2001.

Considérons le cas le plus simple, celui de Cauchy : il est évident que la représentation proposée est elle aussi un cas particulier : une projection sur un plan parallèle à une des faces du cube et dont le centre de projection est situé sur la médiatrice de la face considérée.

Bien d'autres projections d'un cube sur un plan sont concevables, par exemple celle particulière où le centre de projection est situé sur le prolongement d'une diagonale du cube sans compter bien sûr toutes les situations intermédiaires produisant des formes plus ou moins régulières. On peut aussi considérer une combinaison de deux ou plusieurs projections qui permettrait de projeter d'un espace à quatre dimensions dans un espace à trois puis à deux dimensions. Le nombre de possibilités croît ainsi considérablement sans que nécessairement le nombre de sommets et d'arcs soit modifié, et toutes peuvent être la réalisation sur un plan d'un même graphe à trois quatre ou N dimensions.

Là encore ce simple exemple montre que la réalisation du graphe doit être précisée si l'on veut qu'elle soit répétitive et vérifiable comme le souhaite Waldo Tobler pour les cartes et plus généralement ce que nous appelons images de synthèse.

De plus il est évident que si la représentation du graphe est automatisée et répétitive, et elle l'est nécessairement par un algorithme qui doit être objectif et accessible dans son principe sous peine de mettre en doute l'ensemble du programme du logiciel utilisé.

Or les ouvrages courants d'algorithmiques^{14 15} et de géométrie discrète ne traite pour ainsi dire pas du problème.

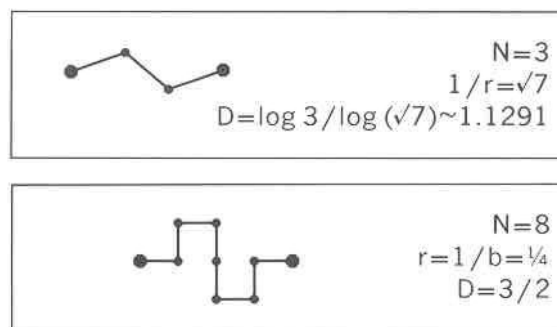
Le problème consistant à compléter les modalités de production des graphes classiques pour qu'ils soient reproductibles et donc vérifiables est relativement évident et c'est essentiellement un problème d'objectivation d'un processus dont les algorithmes existent déjà dans nombre de logiciels dont l'accès du code source n'est malheureusement pas encore libre.

Par contre le problème initial : peut-on décrire sous forme de graphes des fractales et peut-on en réaliser des reproductions graphiques qui possèdent les mêmes propriétés d'auto similarité, d'homothétie interne des fractales simples de Mandelbrot, est beaucoup plus riche.

4 Graphes et fractales de Mandelbrot.

Benoît Mandelbrot lui-même décrit dans son ouvrage¹⁶ les générateurs de ses fractales comme des graphes linéaires sans cependant nommer ou individualiser les points qu'il fait très nettement figurer aux extrémités des segments de droite comme le montrent les 2 figures (Mandelbrot, p. 46 et 50) ci-dessous choisies parmi de nombreux exemples.

Figure 3 : Générateur de fractale de Mandelbrot et Générateur de Mandelbrot



¹⁴ Thomas CORMEN, Charles LEISERSON, Ronald RIVEST, Introduction à l'algorithmique, Dunod 1994, Paris, traduit de l'américain Xavier Cazin : Introduction to algorithms, The Massachusetts Institute of Technology, 1990. 1019 pages.

¹⁵ BANG-JENSEN Jorgen and GUTIN Gregory, Digraphs : Theory, Algorithms and Applications Springer Verlag ondon, Berlin, Heidelberg 2001, 754p

¹⁶ MANDELBROT Benoit B. , The fractal geometry of nature, W. H. FREMAN and compagny New York 1977, p 46 et ss.

On peut sans aucune difficulté considérer que le générateur est un graphe simple mais dont la réalisation possède des caractéristiques particulières notamment la planéité, le nombre de segments élémentaires, leurs tailles et leurs positions géométriques successives (angle avec le précédent, région de l'espace...). On peut alors individualiser les sommets en les nommant et ce générateur va ainsi pouvoir être réalisé à de multiples échelles en jouant sur la taille du segment élémentaire.

Figure 4 : premier stade l'arc simple

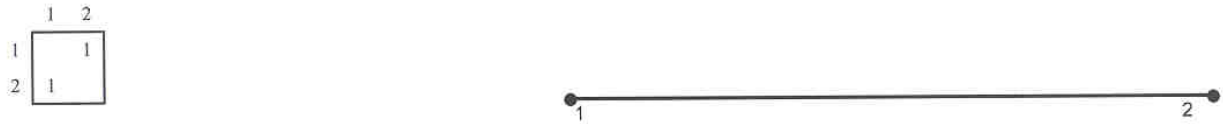
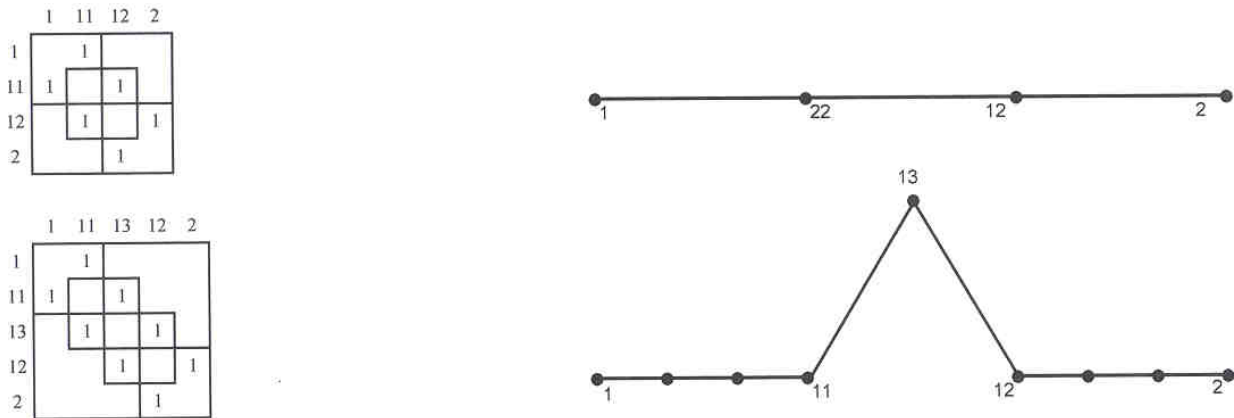


Figure 5 : deuxième et troisième stade extension du graphe et remplacement de l'arc central par deux arcs de même longueur dans la partie positive du plan et matrices d'adjacence associées



Considérons le premier graphique : nous avons l'arc $x, y : 1,2$ défini par la matrice d'adjacence . La réalisation du graphe est plane, l'arc est de longueur = 1, il est horizontal.

Considérons la matrice d'adjacence du deuxième graphe : nous avons procédé à une extension du graphe consistant à créer deux sommets intermédiaires sur l'arc du graphe précédent, la longueur des nouveaux arcs étant égale à $1/3$ de la précédente soit $r = 1/3$.

Il faut noter que dans le cas d'une extension du graphe par intrapolation les sommets 11 et 12 créés, doivent être intercalés entre les sommets précédents. Si l'on suit cette simple contrainte, on constate que la seconde matrice est auto similaire à la précédente et que si l'on divise cette matrice en cinq sous matrice $2*2$, les trois secteurs diagonaux sont identiques à la matrice de premier niveau.

On précisera que la réalisation doit suivre l'ordre de la matrice d'adjacence.

Remplaçons l'arc central par deux arcs de même longueur soit $1/3$ comme cela est figuré sur le troisième schéma. On a créé un nouveau sommet 13 qui s'intercale entre les sommets 11 et 12 de la matrice précédente. La nouvelle matrice est toujours dotée de la propriété d'auto similarité.

Pour que la réalisation soit reproductible on précise la situation du nouveau sommet par rapport au segment précédent : il doit se situer dans la partie positive (ou négative) du plan.

Nous avons le premier niveau de la courbe de von KOCH, il ne reste plus qu'à répéter la même séquence d'opérations pour obtenir le second niveau de la courbe de von KOCH, figurée sur le quatrième schéma.

Figure 6 : première itération du graphe de la courbe de von KOCH

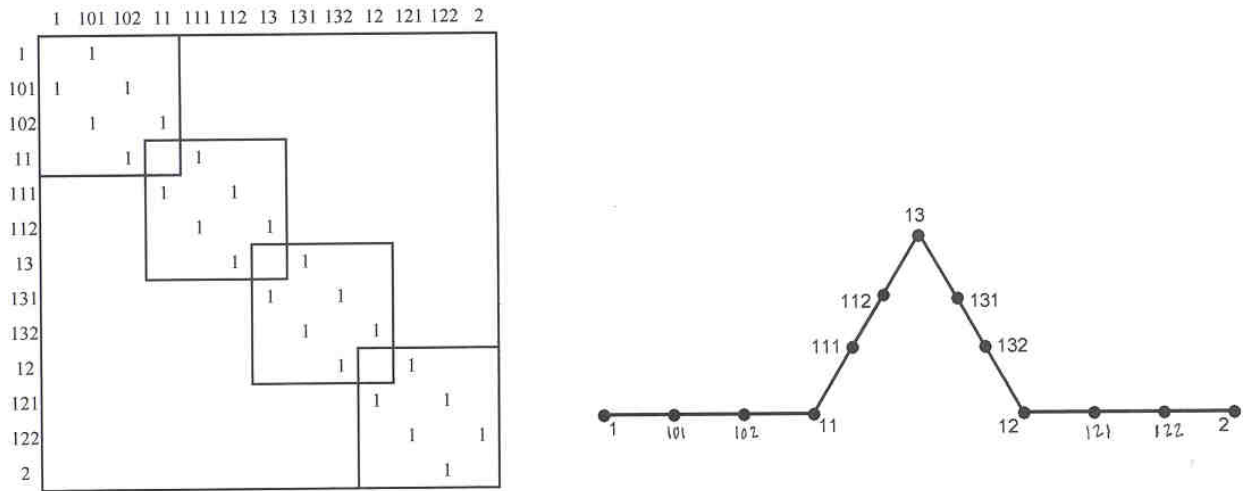
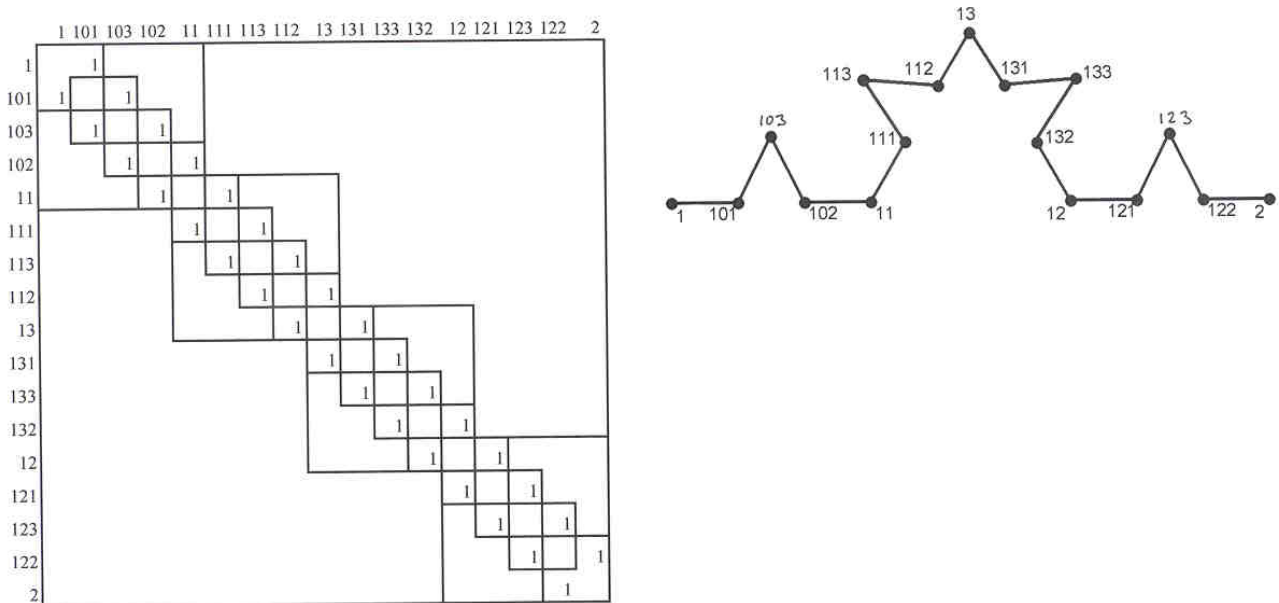


Figure 7 : Graphe de la courbe de von KOCH seconde itération et autosimilarité de la matrice d'adjacence



On peut conclure de ce premier exemple que :

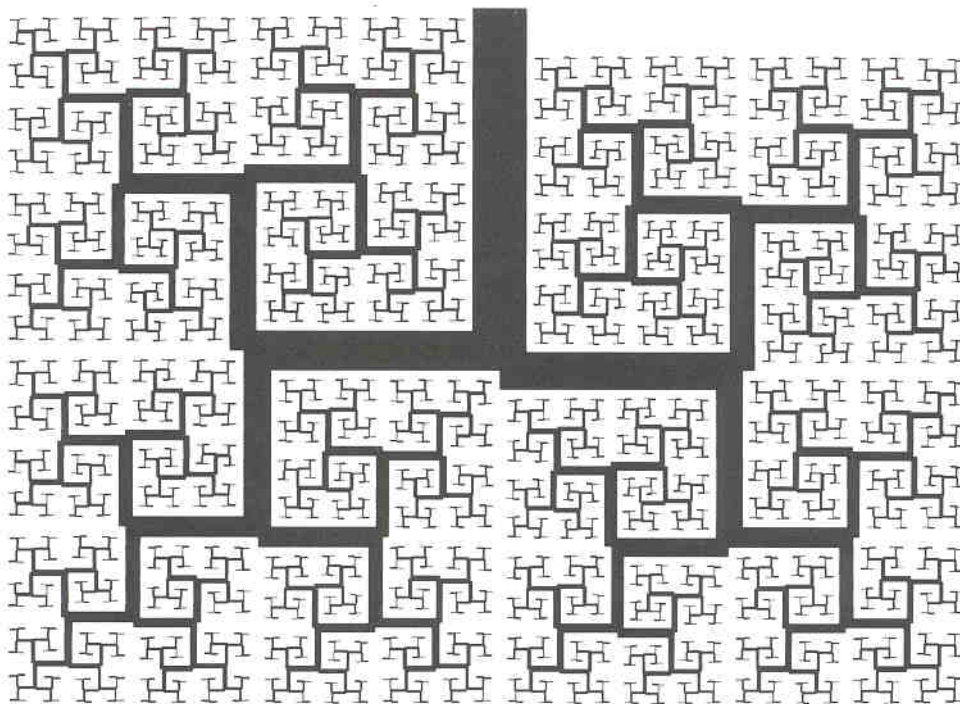
- la courbe de von KOCH peut être décrite sous forme de graphe,
- la matrice d'adjacence, sous condition d'intercaler les nouveaux sommets entre les précédents, est dotée de la propriété d'homothétie interne et qu'elle se développe identiquement à elle-même, que chaque sous matrice indiquée reproduit les matrices d'adjacence de niveau précédent,
- la réalisation du graphe doit obéir à des contraintes spécifiques pour reproduire la fractale sous sa forme classique :
 1. la réalisation doit être plane
 2. les arcs sont des segments de droite
 3. la longueur de l'arc intrapolé est dans le rapport r avec l'arc initial,
 4. l'arc du milieu est remplacé par deux arcs de même longueur,

5. la notation décimale des sommets créés sur un arc ajoute un indice à la notation du sommet de gauche et dans le cas du remplacement, la notation est du même niveau que celle des deux sommets de l'arc remplacé,
6. cette notation permet de connaître le niveau de chaque élément et la longueur de chaque arc considéré.

5 Graphe et fractale arborescente, la H-fractale de Mandelbrot

La courbe de von KOCH est un exemple type d'extension du graphe par intrapolation. La question se pose justement de la possibilité d'extension du graphe par extrapolation. Nous aborderons cette question avec la H-fractale de Mandelbrot (p.164).

Figure 8 : H-Fractale de Benoît Mandelbrot

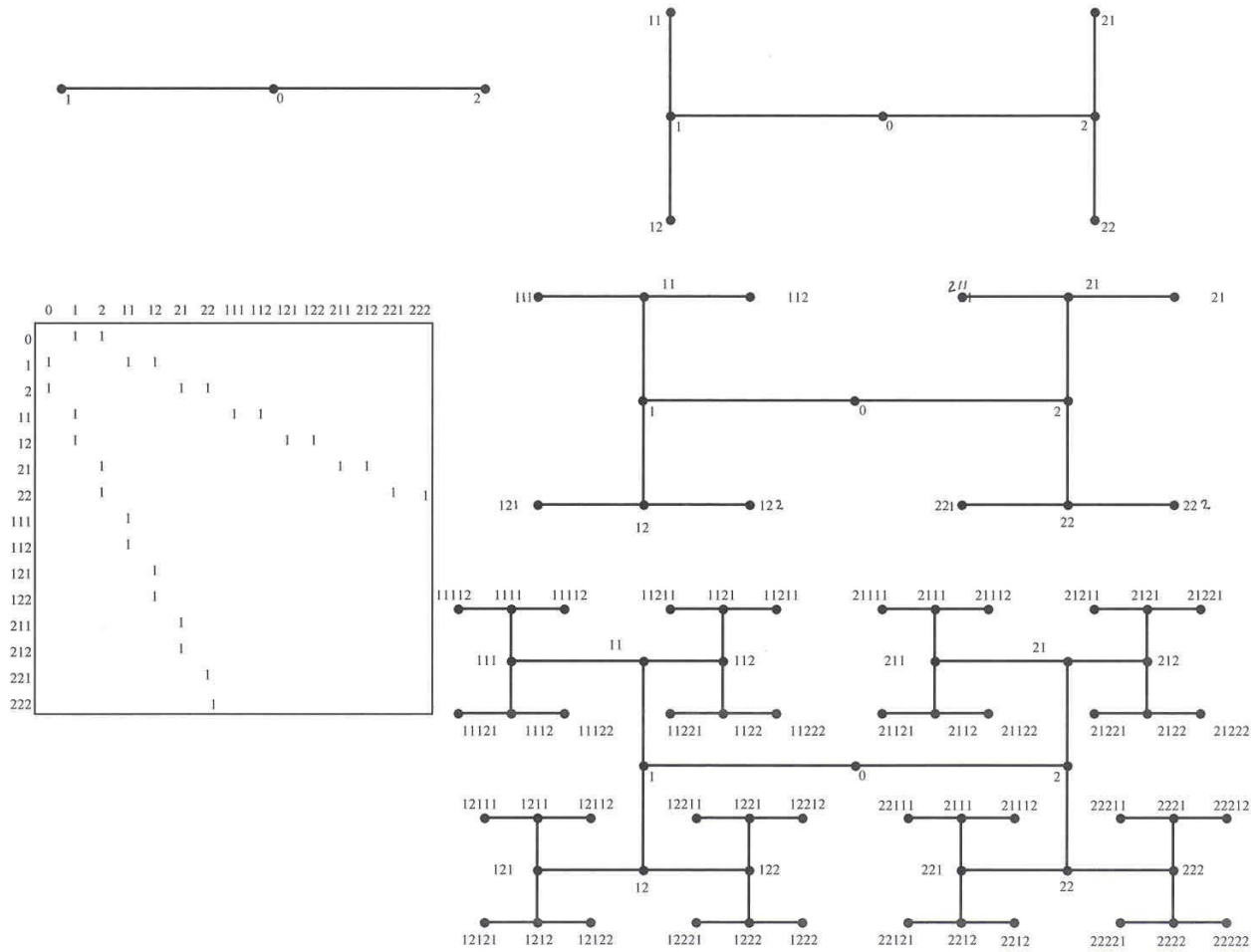


Considérons la fig.5.1 à partir du sommet O du plan, nous construisons deux arcs colinéaires de part et d'autre de ce sommet. La matrice d'adjacence est évidente : une matrice (3,3) symétrique.

Nous procédons à l'extension du graphe de départ en ajoutant à chaque extrémité de celui-ci un arc (segment de droite) orthogonal dont la longueur est la moitié du précédent et dont le numéro sera celui du sommet origine augmenté d'un indice (numérotation décimale).

Les sommets nouvellement créés sont listés dans l'ordre mais ici à la suite des sommets du niveau précédent c'est une extension par extrapolation.

Figure 9 : Les schémas 5.2, 5.3 et 5.4 illustrent le processus



Comme précédemment, il suffit de recommencer la procédure, le nombre de fois voulu pour développer le graphe fractal et sa matrice d'incidence.

Le schéma 5.3 nous montre le résultat de quatre itérations successives qui produit un graphe fractal à trente et un sommets.

La matrice d'adjacence est auto-similaire et la réalisation sous les conditions énoncées est identique à la H-fractale de Mandelbrot.

Remarquons cependant que si l'on ne respecte pas la condition d'orthogonalité des deux nouveaux arcs et qu'on la remplace par une colinéarité pour l'un et une orthogonalité pour l'autre en inversant les conditions suivant la branche, on obtient une arborescence parfaitement régulière qui naturellement est elle aussi un graphe particulier : un arbre.

Figure 10 : Mandelbrot lui-même nous fournit de très beaux exemples d'arborescence avec cette fractale (p. 155)

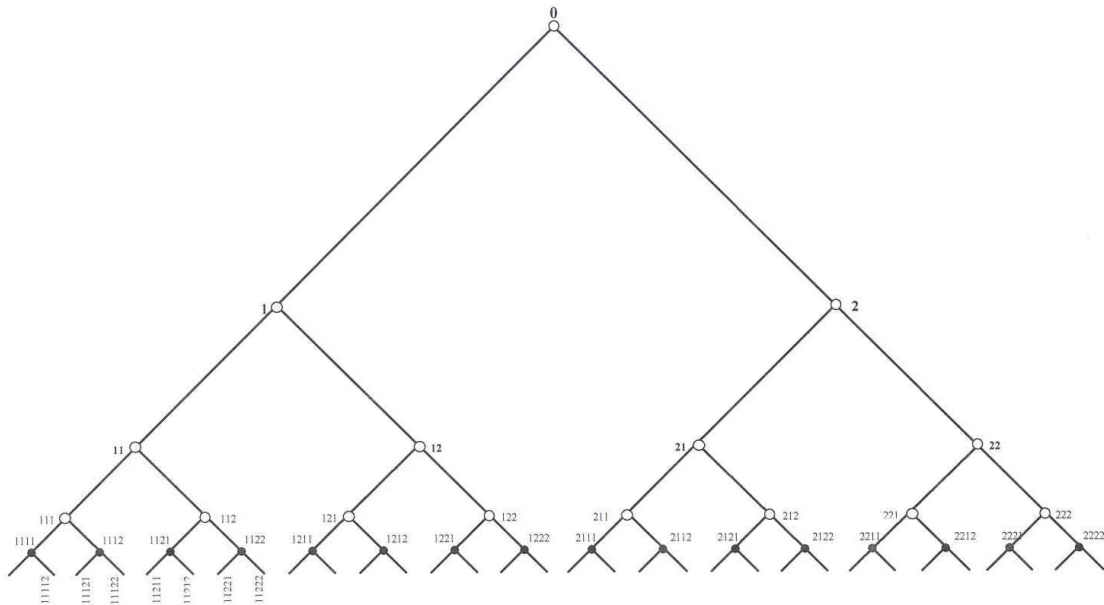
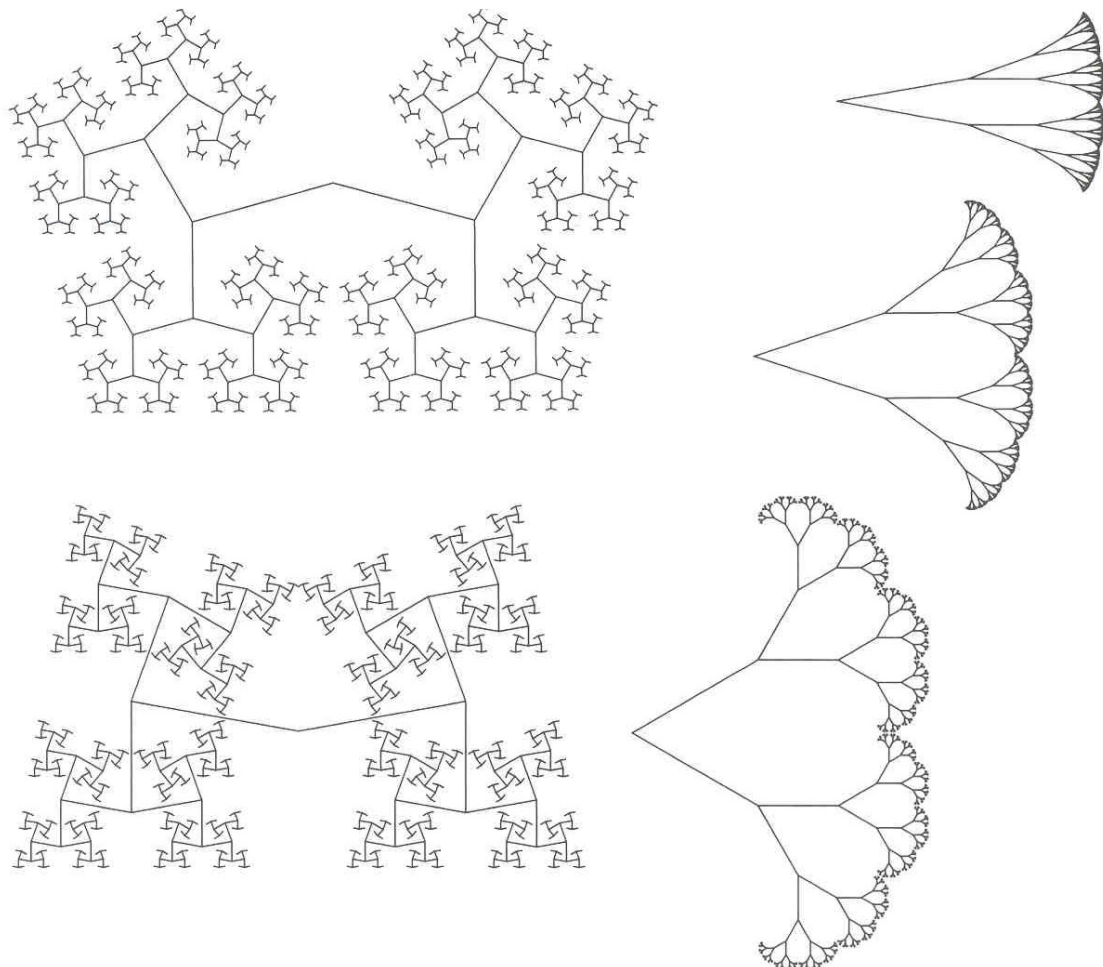


Figure 11 : Fractales de Mandelbrot



Cet exemple évident démontre la nécessité d'une définition algorithmique précise et complète de la réalisation pour que celle-ci soit reproductible.

La réalisation du graphe doit obéir à des contraintes spécifiques pour reproduire la fractale sous sa forme classique :

1. la réalisation doit être plane
2. les arcs sont des segments de droite
3. la longueur des arcs extrapolés est dans le rapport r avec l'arc initial,
4. l'arc est prolongé par deux arcs de même longueur faisant un angle donné avec le précédent,
5. la notation décimale des sommets créés sur un arc ajoute un indice à la notation du sommet de départ,

cette notation permet de connaître le niveau de chaque élément et la longueur de chaque arc considéré.

Ces conditions ne sont valables que pour une réalisation symétrique, il est possible d'avoir des rapport r différents pour chaque branche de même que des angles non égaux comme le montre la représentation ci-dessous d'un arbre de Pythagore.

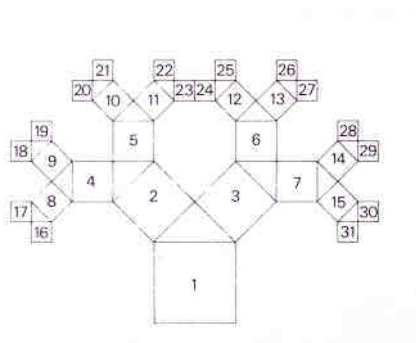
6 L'arbre de Pythagore

L'exemple de l'arbre de Pythagore¹⁷ permet de considérer une utilisation plus complète des graphes avec la prise en compte de la dualité.

Le mode de construction de l'arbre est basé sur la première démonstration du fameux théorème.

On associe à chaque coté d'un triangle rectangle un carré, l'hypoténuse vers le bas et on poursuit de même en attribuant au coté opposé des plus petits carrés un triangle rectangle dont l'hypothèse correspond à la longueur du carré considéré et ainsi de suite.

Figure 12 : Arbre de Pythagore : construction des premières itérations



On obtient alors l'arbre de Pythagore symétrique ou dissymétrique suivant le choix du triangle rectangle, choix que l'on peut considérer fixe dans un premier temps.

Considérons le quasi-dual¹⁸ de cette figure que l'on peut décrire comme un graphe. Le quasi dual se définira par les centres de chaque figure ou face unitaire, ici des carrés ou des triangles rectangles isocèles et les arcs les joignant.

¹⁷ LAUWERIER Hans, Fractals, endlessly repeated geometrical figures, Penguin books 1987, Princeton University Press 1991, 203p.

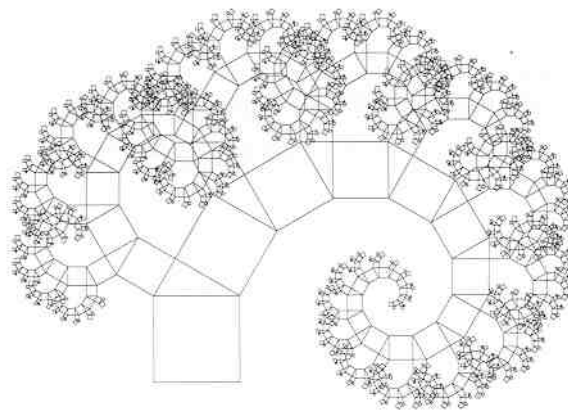
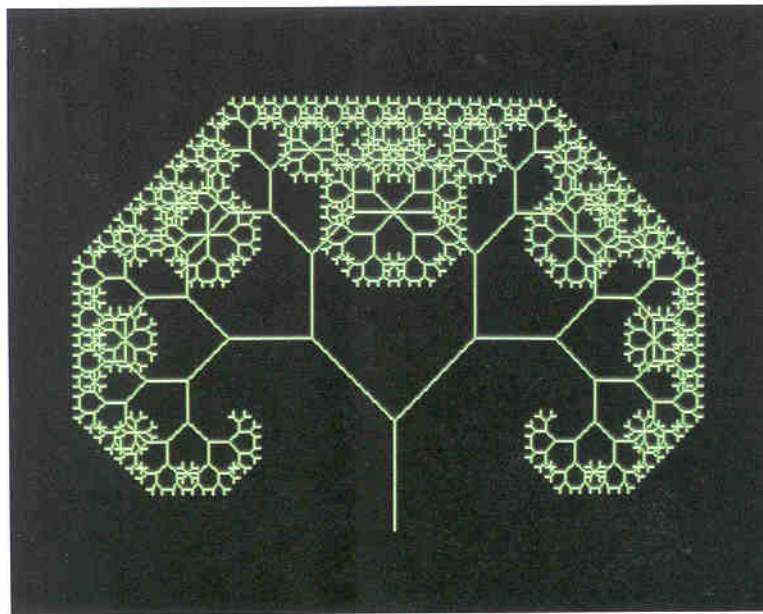
¹⁸ Le quasi dual est un graphe dual dont les cotés infinis ne sont pas pris en compte. Cf. définition et justification dans Réseaux, graphes, représentations et développements s/dir. Ph. MATHIS, Traité IGAT, Hermes à paraître 2001.

On obtient ainsi le schéma 7.2 qui, on le voit, est une forme de la H-fractale obtenue à partir de la même matrice d'adjacence mais dont les arcs nouveaux font avec l'arc de niveau précédent un angle de $\pm\pi/4$.

Les deux réalisations de l'arbre de Pythagore sont duales et la réalisation en est très simplifiée par l'utilisation du quasi dual.

L'arbre de Pythagore peut tout aussi bien être réalisé de façon dissymétrique à partir d'une même construction géométrique supprimant la condition que le triangle rectangle soit isocèle et en fixant une valeur, voire même en admettant une variabilité aléatoire, soit à partir d'une description par une matrice d'adjacence et des angles différents ou variables aléatoirement.

Figure 13 : Arbre de Pythagore non symétrique



7 Quelques exemples de réalisations multi-planaires

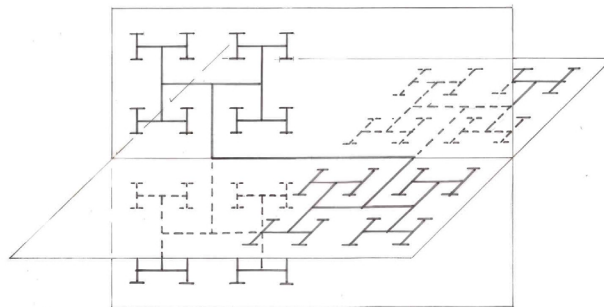
La matrice d'adjacence précédente nous a permis de montrer que le nombre de réalisation du graphe n'est pas limité même si toutes sont planes.

Or cette caractéristique peut très bien être discutée voire supprimée.

On peut par exemple considérer une H-fractale dont les deux branches seraient réalisées sur deux plans orthogonaux comme le montre le figure 8-1.

Il suffit de poser en remplacement de la condition 1: la représentation est biplane la branche 1... appartient au plan P1, la branche 2... appartient au plan P2 orthogonal à P1, les deux plans ayant leur intersection suivant la droite support de l'arc 12.

Figure 14 : Schéma 8.1 fractale bi-planaire à branches orthogonales



Nous sommes en présence d'une fractale biplane.

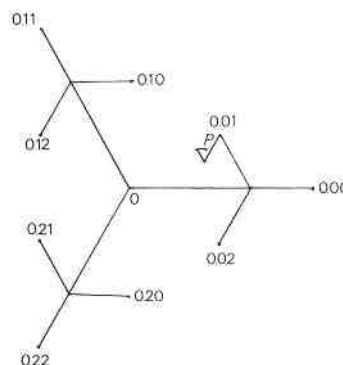
On peut tout aussi bien considérer que chaque nouvel arc est orthogonal au plan des deux arcs de niveaux précédents. Nous serons alors en présence d'une fractale multiplans comme sur l'exemple suivant :

8 L'exemple du tapis de Sierpinski et son utilisation dans la théorie de Christaller

Considérons un arbre ternaire¹⁹. A partir d'un sommet nous construisons l'extension du graphe par extrapolation, chaque branche formant un angle de $2\pi/3$ avec la suivante.

Cet arbre nous permet de définir un quasi dual tel que chacun des quatre sommets du primal soit le centre d'une face duale formée par un triangle équilatéral, lesquels quatre triangles équilatéraux forment eux-mêmes un triangle équilatéral. Cette figure nous donne elle-même son rapport de réduction : chaque face du dual est égale au $1/4$ de la face du niveau précédent, chaque arc sera égal au $1/x$ de l'arc précédent.

Figure 15 : Arbre ternaire comme générateur



¹⁹ LAUWERIER, H. ,op.cit.p. 11-12

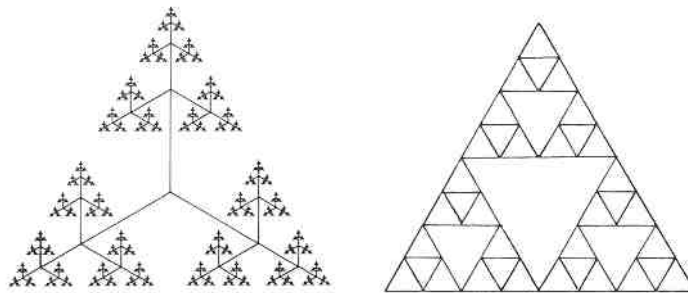
Ajoutons une contrainte à cette réalisation : on ne considère comme pleine que la face possédant un sommet terminal.

Par analogie la face du sommet unique sera considérée comme étant elle aussi un triangle équilatéral de dimension identique à celui déterminé par les quatre du niveau immédiatement inférieur. Ce graphe ne possédant qu'un sommet, celui-ci sera ipso facto terminal et le triangle sera plein.

Au niveau immédiatement inférieur, seules seront considérées comme pleines, les faces associées aux trois sommets terminaux et la face centrale sera vide.

Lors de la phase suivante le processus se reproduit, chaque sommet du graphe primal donne lieu à une extension ternaire et chaque face triangulaire pleine se divise en quatre faces triangulaires dont une vide, la face centrale etc.

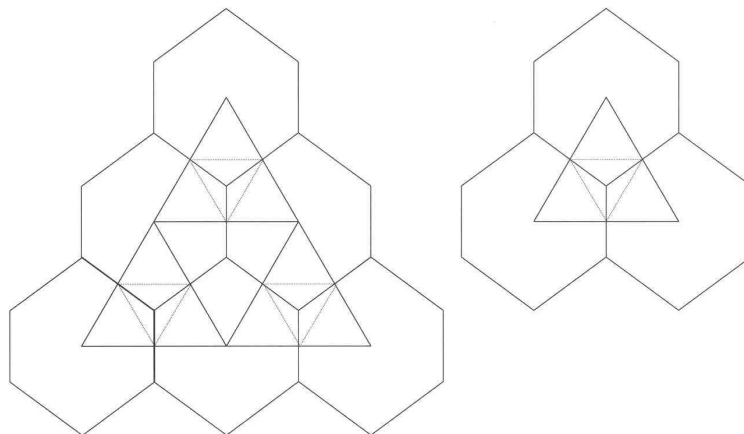
Figure 16 : Arbre ternaire troisième itération et Quasi dual



Préciser la matrice d'adjacence du graphe dual.

On obtient ainsi un tapis de Sierpinski à partir d'un graphe et de son extension par extrapolation.

Figure 17 : hexagones de Christaller obtenus à partir d'un générateur ternaire



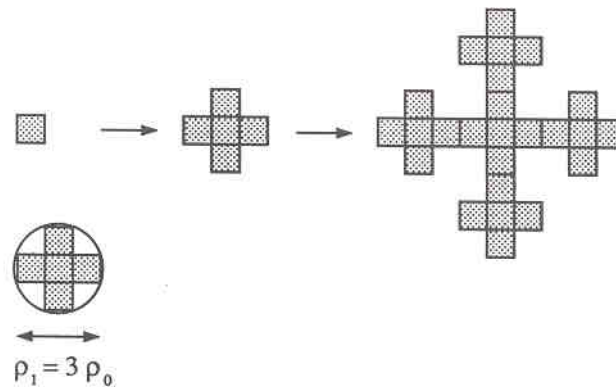
Si l'on supprime la condition que seuls les sommets terminaux correspondent à des triangles pleins, on obtient les hexagones de Christaller dans le cas ici du principe du marché $K=3$.

9 Expansion des réseaux et fractales en extension

Jusqu'à présent les fractales considérées étaient des fractales convergentes du fait d'un rapport de réduction inférieur à 1.

Dans ce cas ces fractales possédaient une limite supérieure et l'homothétie interne ne s'appliquait qu'à partir d'une origine. Si par contre on considère un rapport d'agrandissement supérieur à 1, on dispose alors d'un outil pour rendre compte de l'extension des réseaux, de la croissance des villes etc. et l'on rejoint les phénomènes de type percolation.

Figure 18 : Fractale en extension de P. FRANKHAUSER



10 Maillage des réseaux, cas limite entre extension et réduction

La croissance des réseaux ne se fait pas uniquement par extension et création de nouveaux arcs extérieurs, elle s'effectue aussi, et notamment lorsque la densité augmente, par maillage de plus en plus fin.

Le problème du maillage fractale est en fait simple : c'est la situation limite entre extension arborescente et convergence vers une limite.

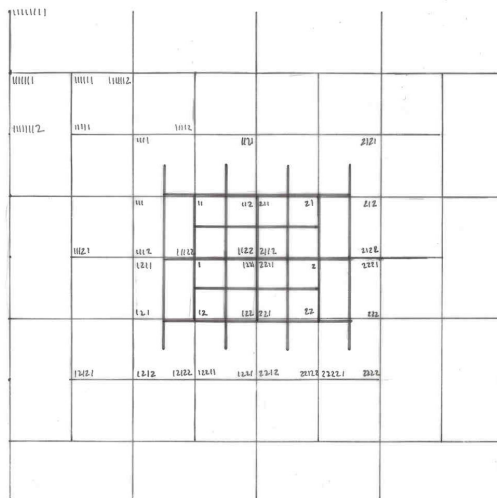
Si l'on considère un facteur de réduction $r \leq 1$ et un facteur d'agrandissement $a \geq 1$ la situation limite est bien évidemment la valeur 1 pour laquelle la fractale se reproduit identiquement à elle-même.

Le problème du maillage de plus en plus fin (éventuellement jusqu'à une limite...) se résout par un coefficient de réduction de la taille du générateur avec un retard éventuel.

L'exemple de la H-fractale permet de le montrer.

Dans cet exemple nous utilisons une H-fractale de Mandelbrot dont le facteur de réduction prend la valeur limite 1. La première fractale a une taille de générateur fixée à deux. Le second générateur de même facteur de réduction a une taille fixée à 1 soit deux fois plus petit. Le second processus se développe avec un retard fixé ici arbitrairement à 2 itérations. Lorsque le premier processus arrive à la septième itération le second n'en est qu'à la cinquième.

Figure 19 : Exemple de maillage avec retard par utilisation d'un facteur de réduction limite =1 et un retard dans la réduction de la taille du générateur



Or, comme cette fractale est de dimension deux fois plus petite elle ne concerne encore que le centre de la figure précédente. On peut interpréter ainsi une première vague de lotissement urbain dans une ville puis après deux périodes de x temps, un second maillage se développe plus dense donnant par exemple accès au centre des parcelles précédentes pour permettre leur constructibilité.

On pourrait tout aussi bien inverser le processus : une première urbanisation dense puis une seconde périphérique à réseau moins serré ...

Ce type de fractale possède cependant, par construction, des points doubles (qui sont mentionnés sur la figure ci-dessus) qu'il convient d'éliminer de la matrice d'adjacence. De la même manière lorsque deux arcs se superposent à un seul préalable, ce sont les deux derniers qu'il convient de garder dans la matrice d'adjacence sauf utilisation d'un multigraphe faisant coexister une voie rapide à tunnel et toboggan et une voie normale.

11 Exemples d'application des fractales aux réseaux de transport

L'exemple est ici très clair : les réseaux nationaux et départementaux sont des graphes planaires saturés, maille triangulaire sans possibilité de rajouter un arc sans que celui ci en coupe un autre. L'homothétie interne est donc parfaitement réelle, seule la position des sommets change et globalement cela implique une variation quasi aléatoire. La succession à divers niveaux de graphes planaires : département, région, France et Europe, constitue donc une véritable structure fractale car non seulement les graphes sont de même nature, mais les villes principales sont les mêmes aux quatre niveaux. Par contre, lorsque l'on descend d'un niveau, et que l'échelle s'agrandit, de nouvelles villes, sommets du graphe, apparaissent ainsi que de nouveaux arcs.

On est alors typiquement dans le cas d'une extension du graphe par intrapolation de type von KOCH pour le dessin des routes beaucoup moins linéaire et de type à double maillage triangulaire.

Lorsque l'on descend à des niveaux suffisamment fins, on est alors obligé de prendre en compte les contraintes naturelles qui s'imposent. Les deux derniers niveaux sont perturbés par la présence de la Loire et le manque de ponts qui à cette échelle rend le réseau planaire non saturé.

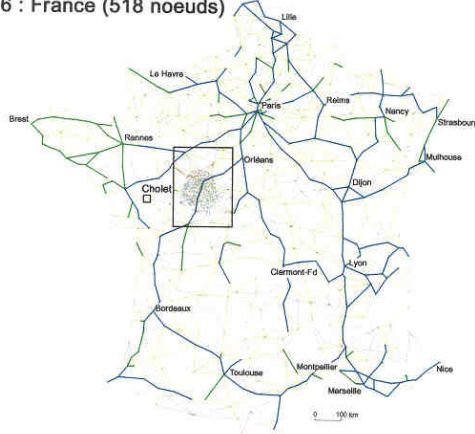
Sur l'agglomération et surtout pour Tours entre rivières – Tours centre - le maillage rhomboïdal ancien s'impose et se développe à partir de la vieille ville aux zones urbanisées à partir de la seconde moitié du XIX siècle. D'où un caractère non saturé du graphe et une illustration du maillage comme situation limite dans un espace dense car on peut remarquer que nous avons là une parfaite illustration de plusieurs densités de maillage sur cette zone.

Figure 20 : Exemple de réseau avec homothétie interne : Thèse de Laurent CHAPELON

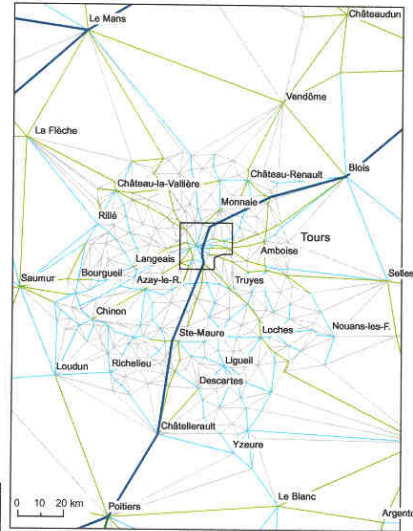
ACHEVEMENT DU PERIPHERIQUE DE TOURS

Espace de référence à quatre niveaux d'organisation imbriqués et descriptif du projet

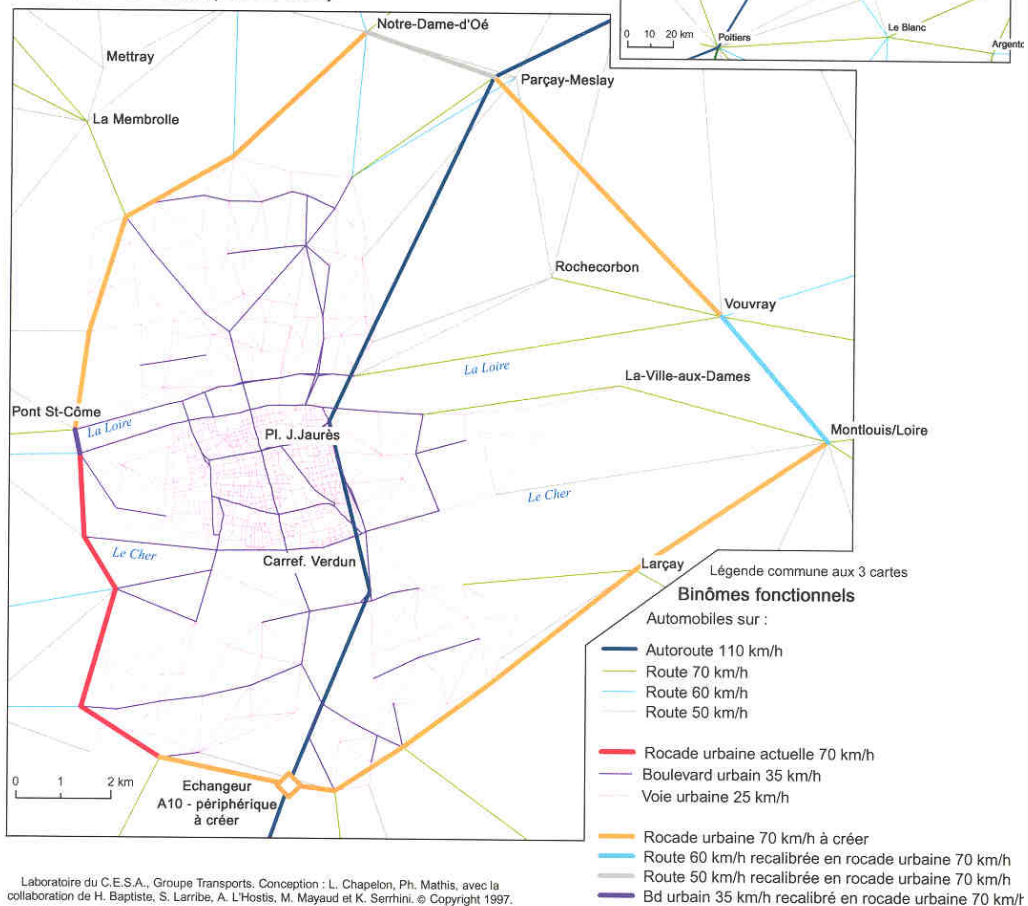
Carte 6 : France (518 noeuds)



Carte 7 : Indre-et-Loire (311 noeuds)



Carte 8 : Agglomération (186 noeuds) et centre de Tours (605 noeuds)

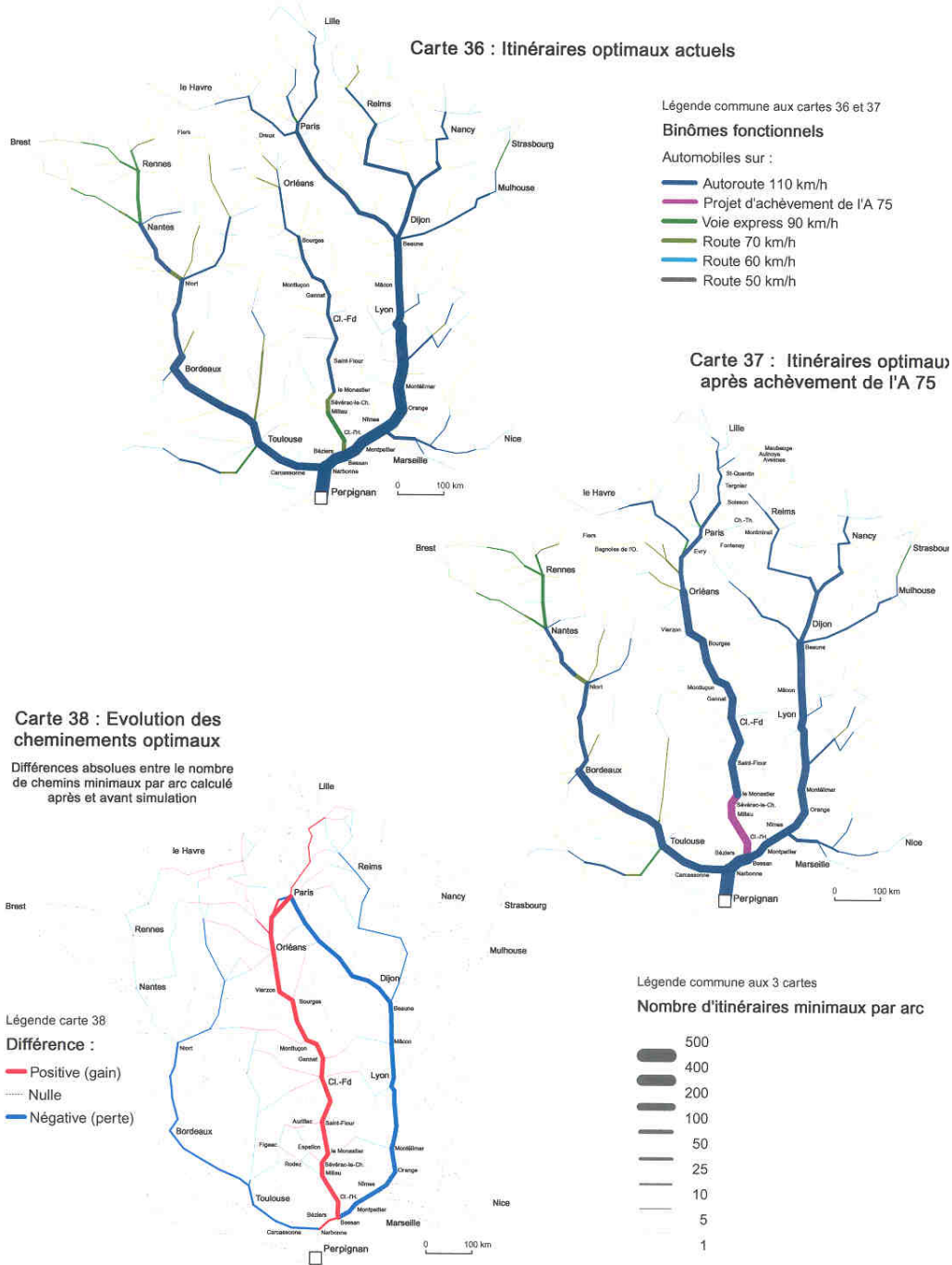


Le second exemple tiré de la même thèse est tout aussi net : on est en présence d'une arborescence irrégulière apparemment proche d'une arborescence de type stochastique liée à la définition des plus courts chemins à partir de Perpignan pour le reste de la France.

Figure 21 : Arborescence des trajets minimaux à partir de Perpignan vers le reste de la France (L. CHAPELON)

ACHEVEMENT DE L'A 75 CLERMONT-BEZIERS

Analyse de la structure des itinéraires optimaux en temps au départ de Perpignan



Laboratoire du C.E.S.A., Groupe Transports. Conception : L. Chapelon, Ph. Mathis, avec la collaboration de H. Baptiste, S. Larribe, A. L'Hostis, M. Mayaud et K. Serrhini. © Copyright 1997.

L'irrégularité des arborescences résulte des obstacles géographiques : Massif Central, Vallée du Rhône... Dans le cas de cette simulation, il n'y avait à disposition pour comparer les deux solutions que des indices matriciels (nombre de sommets desservis par arborescence, longueurs des trajets...) mais pas d'indices morphologiques.

La nature fractale évidente de cette arborescence permet alors d'utiliser le calcul de la dimension fractale et d'étalement²⁰ de chaque branche.

12 Conclusion

Partant du constat que les réalisations de représentations des graphes ne sont pas soumises à des règles explicites mais au contraire sans aucune hypothèse selon Claude BERGE, nous nous sommes attachés dans un premier temps à montrer que les fondateurs avaient fait preuve de beaucoup de variété dans l'utilisation des supports de réalisation et que les conséquences n'étaient pas neutres.

Nous avons ensuite constaté que Mandelbrot lui-même, le « père des fractales » avait représenté ses générateurs sous une forme qui évoquait irrésistiblement un graphe, ce qui confortait notre propre hypothèse selon laquelle graphes et fractales peuvent s'exprimer dans le même système.

Puis nous avons essayé de démontrer que les graphes peuvent rendre compte d'une courbe de von KOCH ou d'une H-fractale de Mandelbrot sous réserve de préciser les conditions de réalisations des graphes et sous condition d'utiliser une certaine forme de notation des sommets pour que les matrices d'adjacence gardent leurs propriétés d'auto-similarité.

Nous avons insisté sur le fait que l'absence de ces conditions de réalisation conduisaient à des représentations très différentes bien que toujours fractales, soulignant ainsi la très grande sensibilité de la représentation.

Nous avons rapidement montré que les fractales peuvent décrire la hiérarchie des espaces christallériens.

Un bref détour par les fractales en extension de FRANKHAUSER nous a permis de préciser la condition limite d'une fractale de maillage, avec plusieurs tailles de générateurs pouvant rendre compte de différentes densités de maillage et aussi des structures hiérarchiques de Brian Berry.

L'intégration des fractales dans la théorie des graphes nous fournit des méthodes d'extension des graphes et inversement des méthodes de simplification des graphes qui sont toutes aussi nécessaires. On peut intégrer des niveaux différents de représentation avec une justification théorique bien que la démonstration ne soit que silhouettée et non pas formalisée strictement.

Nous avons ensuite à l'aide de deux exemples de modélisation de réseaux réels montré que chacune de ces caractéristiques et propriétés théoriques avaient leur contrepartie et leur nécessité dans la modélisation des réseaux et qu'elles en fondaient en théorie la possibilité concrète déjà utilisée. De plus cela permet de disposer d'une série d'indicateurs morphologiques qui jusqu'à présent faisaient défaut à la Théorie de Graphes.

Pour reprendre une formule de Pierre Henri DERYCKE, cela permet de passer d'un « pragmatisme motorisé » à une représentation plus fondée, donc plus « objective » et donc plus reproductible et plus vérifiable au sens de Waldo TOBLER.

²⁰ GENRE-GRANDPIERRE Cyrille, Forme et fonctionnement des réseaux de transport : approche fractale et réflexions sur l'aménagement des villes, Université de Franche Comté, 2000.

13 Bibliographie